## 4.2.21 Soustava rovnic

**Předpoklady:** 040216

**Př. 1:** Dědeček chová králíky a slepice. Celkem má 13 kusů domácích zvířat, která mají dohromady 40 nohou. Kolik má králíků a kolik slepic?

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| Počet králíků | … | $k$ | … | králičích nohou $4k$ |
| Počet slepic | … | $s$ | … | slepičích nohou $2s$ |

Celkem 13 kusů domácích zvířat: $k+s=13$.
Celkem 40 nohou: $4k+2s=40$.

Potřebujeme rovnice dát dohromady:
$k+s=13 \quad / -s$
$k=13-s \Rightarrow$ místo $k$ můžeme kdekoliv psát $13-s$
$4(13-s)+2s=40$
$52-4s+2s=40 \quad / -40$
$12-2s=0 \quad / +2s$
$2s=12 \quad / :2$
$s=6$

Počet králíků: $k=13-s=13-6=7$.

Dědeček chová 7 králíků a 6 slepic.

Dosud jsme se ve všech slovních úlohách snažili sestavit jednu rovnici. Tím končila obtížná část úlohy a následovalo použití jednoduchých a stále stejných pravidel na řešení rovnice.

Ve skutečnosti však v předchozím příkladu nehledáme jednu hodnotu, ale hodnoty dvě (počet slepic a počet králíků).
Dvojice rovnic $\begin{matrix} k+s=13 \\ 4k+2s=40 \end{matrix}$ tak představovala názornější a logičtější řešení slovní úlohy než samotná rovnice $4(13-s)+2s=40$.

Podobných případů je mnoho, proto se zavádí jak pojmenování, tak metody pro řešení skupin rovnic, které mají větší počet neznámých.

**Dvojici rovnic $\begin{matrix} k+s=13 \\ 4k+2s=40 \end{matrix}$ označujeme jako soustavu dvou rovnic o dvou neznámých.**
**Řešením takové soustavy je dvojice čísel $[k; s]$, která můžeme dosadit za proměnné *k*, *s* a ze soustavy rovnic vznikne dvojice platných rovností.**

Na řešení soustav rovnic existuje několik metod, nejjednodušší z nich označovanou jako dosazovací jsme již používali při řešení některých slovních úloh, například té z úvodu hodiny.

Zkusíme vyřešit soustavu rovnic $\begin{matrix} 3x+2y=39 \\ 2x+3y=36 \end{matrix}$.

$3x+2y=39$

$2x+3y=36$

Například z první rovnice si vyjádříme výraz pro $y$.

$3x+2y=39 \quad / -3x$

$2y=39-3x \quad / :2$

$y=\dfrac{39-3x}{2}$

Kam dosadíme vyjádřený výraz?

Výraz dosadíme do druhé rovnice a získanou rovnici o jedné neznámé vyřešíme.

$2x+3\cdot\dfrac{39-3x}{2}=36 \quad / \cdot 2$

$4x+3(39-3x)=72$

$4x+117-9x=72 \quad / -72$

$-5x+45=0 \quad / +5x$

$45=5x \quad / :5$

$x=9$

Výraz dosadíme do první rovnice a získanou rovnici o jedné neznámé vyřešíme.

$3x+2\cdot\dfrac{39-3x}{2}=39$

$3x+39-3x=39$

$39=39$

Jak je možné, že jsme pokaždé získali jiný výsledek?

Soustava dvou rovnic o dvou neznámých představuje dvě možnosti volby čísla za každou neznámou a dvě podmínky (rovnice), které musí zvolená čísla splňovat.

Vyjádřením $y$ z první rovnice jsme podmínku obsaženou v první rovnici přepsali do jiného tvaru a dosazením do druhé rovnice jsme obě podmínky splnili. Získaná hodnota $x$ tak splňuje obě podmínky v obou rovnicích.

Vyjádřením $y$ z první rovnice jsme podmínku obsaženou v první rovnici přepsali do jiného tvaru a dosazením zpět do první rovnice jsme jenom zkontrolovali, že čísla splňující tuto podmínku vyhovují rovnici, ze které jsme vyšli. Ve skutečnosti jsme jenom zkontrolovali, že jsme vyjádření a dosazení provedli správně, ale soustavu jsme nevyřešili, protože jsme úplně ignorovali podmínku obsaženou v druhé rovnici.

Měli jsme určit dvě čísla, zatím máme pouze hodnotu $x \Rightarrow$ využijeme vyjádření $y$, abychom určili i druhou neznámou:

$y=\dfrac{39-3x}{2}=\dfrac{39-3\cdot 9}{2}=\dfrac{39-27}{2}=\dfrac{12}{2}=6$

**Pedagogická poznámka:** Také mě to překvapilo, ale při probírání hodiny ve třídě v podstatě nikdo neměl jasnou představu, co by se s vyjádřeným vztahem pro $y$ mělo udělat. Proto jsme se rozdělili na dvě skupiny, každá zkusila jednu z variant a pak jsme debatovali o výsledku.

Zkouška:

$3x+2y=3\cdot 9+2\cdot 6=27+12=39$

$2x+3y=2\cdot 9+3\cdot 6=18+18=36$

Zkouška vyšla $\Rightarrow$ můžeme zapsat výsledek: $K = \{[9; 6]\}$.

V zápisu používáme dva druhy závorek:

- složené $\{\ \}$, protože jednotlivá řešení jsou prvky nějaké množiny,
- hranaté $[\ ]$, protože řešení představují uspořádané (záleží na pořadí) dvojice čísel, které se v matematice zapisují do tohoto druhu závorek.

Při řešení naší soustavy dosazovací metodou jsme měli čtyři možnosti, jak postupovat:

- vyjádřit $y$ z první rovnice a dosadit do druhé
- vyjádřit $y$ z druhé rovnice a dosadit do první.
- vyjádřit $x$ z první rovnice a dosadit do druhé,
- vyjádřit $x$ z druhé rovnice a dosadit do první.

Ve všech případech bychom získali stejný výsledek.

vyjádřit $y$ z první rovnice a dosadit do druhé

Vyjadřujeme $y$ z první rovnice.

$3x + 2y = 39 \quad / -3x$

$2y = 39 - 3x \quad / : 2$

$y = \frac{39 - 3x}{2}$

Dosazujeme do druhé rovnice.

$2x + 3 \cdot \frac{39 - 3x}{2} = 36 \quad / \cdot 2$

$4x + 3(39 - 3x) = 72$

$4x + 117 - 9x = 72 \quad / -72$

$-5x + 45 = 0 \quad / +5x$

$45 = 5x \quad / : 5$

$x = 9$

Dopočteme hodnotu $y$:

$y = \frac{39 - 3x}{2} = \frac{39 - 3 \cdot 9}{2} = \frac{39 - 27}{2} = \frac{12}{2} = 6$

$K = \{[9; 6]\}$

vyjádřit $y$ z druhé rovnice a dosadit do první

Vyjadřujeme $y$ z druhé rovnice.

$2x + 3y = 36 \quad / -2x$

$3y = 36 - 2x \quad / : 3$

$y = \frac{36 - 2x}{3} = 12 - \frac{2}{3}x$

Dosazujeme do první rovnice.

$3x + 2 \cdot \left(12 - \frac{2}{3}x\right) = 39$

$3x + 24 - \frac{4}{3}x = 39 \quad / -24$

$3x - \frac{4}{3}x = 15 \quad / \cdot 3$

$9x - 4x = 45 \quad / +5x$

$5x = 45 \quad / : 5$

$x = 9$

Dopočteme hodnotu $y$:

$y = 12 - \frac{2}{3}x = 12 - \frac{2}{3} \cdot 9 = 12 - 6 = 6$

$K = \{[9; 6]\}$

vyjádřit $x$ z první rovnice a dosadit do druhé

Vyjadřujeme $x$ z první rovnice.

$3x + 2y = 39 \quad / -2y$

$3x = 39 - 2y \quad / : 3$

$x = \frac{39 - 2y}{3}$

Dosazujeme do druhé rovnice.

$2 \cdot \frac{39 - 2y}{3} + 3y = 36 \quad / \cdot 3$

vyjádřit $x$ z druhé rovnice a dosadit do první

Vyjadřujeme $x$ z druhé rovnice.

$2x + 3y = 36 \quad / -3y$

$2x = 36 - 3y \quad / : 2$

$x = \frac{36 - 3y}{2}$

Dosazujeme do první rovnice.

$3 \cdot \frac{36 - 3y}{2} + 2y = 39 \quad / \cdot 2$

$2(39-2y)+9y=108$

$78-4y+9y=108 \quad / -78$

$5y=30 \quad / :5$

$y=6$

Dopočteme hodnotu $x$:

$x=\frac{39-2y}{3}=\frac{39-2\cdot 6}{3}=\frac{39-12}{3}=\frac{27}{3}=9$

$K=\{[9;6]\}$

$3(36-3y)+4y=78$

$108-9y+4y=78 \quad / -78$

$30-5y=0 \quad / +5y$

$30=5y \quad / :5$

$y=6$

Dopočteme hodnotu $x$:

$x=\frac{36-3y}{2}=\frac{36-3\cdot 6}{2}=\frac{36-18}{2}=\frac{18}{2}=9$

$K=\{[9;6]\}$

Ve všech případech dojdeme ke stejnému výsledku.

**Pedagogická poznámka:** Přehled všech variant dosazování pouze promítnu a rychle projdu. Na tabuli nic nepíšu, byla by to ztráta času, zájemci se mohou podívat doma.

**Př. 2:** Sepiš kroky, ve kterých řešíme soustavu dvou rovnic o dvou neznámých dosazovací metodou.

Soustavu dvou rovnic o dvou neznámých řešíme dosazovací metodou ve čtyřech krocích:
1. Z jedné z rovnic vyjádříme jednu z neznámých.
2. Za vyjádřenou neznámou dosadíme do rovnice, ze které jsme nevyjadřovali.
3. Získanou rovnici s jednou neznámou vyřešíme.
4. Hodnotu vypočtené neznámé dosadíme do vyjádření z bodu 1 a tím určíme hodnotu druhé neznámé.

Soustavu dvou rovnic o dvou neznámých řešíme **dosazovací metodou** ve čtyřech krocích:

- Z jedné z rovnic vyjádříme jednu z neznámých.
- Za vyjádřenou neznámou dosadíme do rovnice, ze které jsme nevyjadřovali.
- Získanou rovnici s jednou neznámou vyřešíme.
- Hodnotu vypočtené neznámé dosadíme do vyjádření neurčené neznámé a tím ji určíme.

U dosazovací metody se vyplatí před začátkem výpočtu dobře rozmyslet, ze které rovnice a kterou neznámou vyjádříme. Podstatně si tím můžeme zjednodušit výpočet.

**Př. 3:** Vyřeš libovolnou (pokud možno nejvýhodnější) variantou dosazovací metody soustavy rovnic:

a) $\begin{array}{l} 7x-3y=-1 \\ 5x+y=15 \end{array}$ b) $\begin{array}{l} 3a+2b=15 \\ 5a+4b=23 \end{array}$ c) $\begin{array}{l} 3x+2y=10 \\ 2x-5y=-63 \end{array}$

a) $\begin{array}{l} 7x-3y=-1 \\ 5x+y=15 \end{array}$

Nejvýhodnější bude vyjádřit z druhé rovnici neznámou $y$ (je v rovnici pouze jedenkrát a proto ve vyjádření nebude žádný zlomek).

$5x+y=15 \quad / -5x$

$y=15-5x$

Dosadíme do první rovnice.

$7x - 3(15 - 5x) = -1$

$7x - 45 + 15x = -1 \quad / +45$

$22x = 44 \quad / : 22$

$x = 2$

Dopočteme $y$: $y = 15 - 5x = 15 - 5 \cdot 2 = 5$

$K = \{[2; 5]\}$

b) $\begin{aligned} 3a + 2b &= 15 \\ 5a + 4b &= 23 \end{aligned}$

Vyjádříme si proměnnou $b$ z první rovnice (má nejmenší koeficient, jmenovatel ve zlomku bude pouze 2 a navíc zmizí pro dosazení do druhé rovnice, kde je násobena čtyřmi).

$3a + 2b = 15 \quad / -3a$

$2b = 15 - 3a \quad / : 2$

$b = \frac{15 - 3a}{2}$

Dosadíme do druhé rovnice.

$5a + 4 \cdot \frac{15 - 3a}{2} = 23$

$5a + 2(15 - 3a) = 23$

$5a + 30 - 6a = 23 \quad / -30$

$-a = -7$

$a = 7$

Dopočteme $b$: $b = \frac{15 - 3a}{2} = \frac{15 - 3 \cdot 7}{2} = \frac{15 - 21}{2} = \frac{-6}{2} = -3$

$K = \{[7; -3]\}$

c) $\begin{aligned} 3x + 2y &= 10 \\ 2x - 5y &= -63 \end{aligned}$

Řešení nemá jednoznačně výhodnější variantu (vždy získáme po vyjádření zlomek, který nezmizí po dosazení do druhé rovnice, vždy budeme muset rovnici násobit). Například si vyjádříme $y$ z první rovnice.

$3x + 2y = 10 \quad / -3x$

$2y = 10 - 3x \quad / : 2$

$y = \frac{10 - 3x}{2}$

Dosadíme do druhé rovnice.

$2x - 5 \cdot \frac{10 - 3x}{2} = -63 \quad / \cdot 2$

$4x - 5(10 - 3x) = -126$

$4x - 50 + 15x = -126 \quad / +50$

$19x = -76 \quad / : 19$

$x = -4$

Dopočteme $y$: $y=\frac{10-3x}{2}=\frac{10-3(-4)}{2}=\frac{10+12}{2}=\frac{22}{2}=11$

$K=\{[-4;11]\}$

**Pedagogická poznámka:** Na výhodnost rozmyšlení strategie upozorňuji před začátkem předchozího příkladu a pak ještě jednou poté, co spousta žáků začne řešit příklad naprosto nevýhodně. Nechám je dojet řešení do konce a pak chci, aby si zkusili příklad vylepšit ještě jednou výhodnějším způsobem.

**Pedagogická poznámka:** Překvapivě problematické je u mnoha žáků dopočítávání druhé neznámé (často dosazují do původních rovnic, někteří dokonce řeší soustavu od začátku přes druhou proměnnou). Snažím se oběhat třídu tak, abych stihl podobné automatismy zakázat. Neříkám rovnou, co mají udělat, jen upozorňuji, že už mají v sešitě připravenou lepší cestu, ať ji najdou.

**Pedagogická poznámka:** Trochu jednodušeji, je možné řešit bod b) takto

$3a+2b=15 \quad / -3a$

$2b=15-3a$

Dosadíme do druhé rovnice takto: $5a+4b=5a+2(15-3a)=23$. Vyjádření přes $2b$ ušetří trochu počítání, ale celé třídě s tím hlavu nepletu.

**Pedagogická poznámka:** Dopočítat následující příklad je povinné domácí cvičení.

**Př. 4:** Vyřeš soustavy rovnic.

a) $\begin{aligned}5x+y&=8\\3x+4y&=15\end{aligned}$ b) $\begin{aligned}7a-6b&=-19\\4a+3b&=2\end{aligned}$ c) $\begin{aligned}3u-4v&=17\\4u+3v&=4\end{aligned}$

a) $\begin{aligned}5x+y&=8\\3x+4y&=15\end{aligned}$

Nejvýhodnější bude vyjádřit z první rovnice neznámou $x$ (je v rovnici pouze jedenkrát a proto ve vyjádření nebude žádný zlomek).

$5x+y=8 \quad / -5x$

$y=8-5x$

Dosadíme do druhé rovnice.

$3x+4(8-5x)=15$

$3x+32-20x=15 \quad / -15$

$-17x+17=0 \quad / +17x$

$17=17x \quad / :17$

$x=1$

Dopočteme $y$: $y=8-5x=8-5\cdot 1=3$ $K=\{[1;3]\}$

b) $\begin{aligned}7a-6b&=-19\\4a+3b&=2\end{aligned}$

Nejvýhodnější bude vyjádřit z druhé rovnice neznámou $b$ (je v rovnici pouze třikrát), v druhé rovnici je $b$ šestkrát, zlomek z vyjádření pak zmizí.

$4a+3b=2 \qquad /-4a$

$3b=2-4a \qquad /:3$

$b=\frac{2-4a}{3}$

Dosadíme do první rovnice.

$7a-6\cdot\frac{2-4a}{3}=-19$

$7a-2(2-4a)=-19$

$7a-4+8a=-19 \qquad /+4$

$15a=-15 \qquad /:15$

$a=-1$

Dopočteme $b$: $b=\frac{2-4a}{3}=\frac{2-4(-1)}{3}=\frac{2+4}{3}=2$ $\qquad K=\{[-1;2]\}$

c) $\begin{array}{l} 3u-4v=17 \\ 4u+3v=6 \end{array}$

Řešení nemá jednoznačně výhodnější variantu (vždy získáme po vyjádření zlomek, který nezmizí po dosazení do druhé rovnice, vždy budeme muset rovnici násobit). Například si vyjádříme $u$ z první rovnice.

$3u-4v=17 \qquad /+4v$

$3u=17+4v \qquad /:3$

$u=\frac{17+4v}{3}$

Dosadíme do druhé rovnice.

$4\cdot\frac{17+4v}{3}+3v=6 \qquad /\cdot 3$

$4(17+4v)+9v=18$

$68+16v+9v=18 \qquad /-68$

$25v=-50 \qquad /:25$

$v=-2$

Dopočteme $u$: $u=\frac{17+4v}{3}=\frac{17+4(-2)}{3}=\frac{17-8}{3}=\frac{9}{3}=3$ $\qquad K=\{[3;-2]\}$

**Shrnutí:** V soustavě dvou rovnic o dvou neznámých: dvě neznámé představují dvě volby čísla, dvě rovnice představují dvě podmínky, které musí tato čísla splnit.